№4-дәріс.

Тақырыбы: Квадраттық иррационалдықты интегралдау.

Кейбір иррационал өрнектерді интегралдау.

Рационал емес функциялардың интегралдарын айнымалыны ауыстыру арқылы рационал функцияларға келтіруге болатын жағдайларды қарастырамыз.

1-жағдай. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ есепте, мұндағы a,b,c,d – тұрақты сандар, m- натурал сан, ad-bc≠0, R(x,y)- рационал функция.

$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$ белгілеуі интеграл астындағы өрнекті рационал функцияға әкелетіндігін көрсетеміз. Шынында да, $x = \frac{b-dt^m}{ct^m - a}$, $dx = \frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m - a)^2}dt$ болғандықтан,

$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \int R(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t)\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt = \int R_1(t)dt$, мұндағы $R_1(t)$ - рационал функция.

Мысал 1. $\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$ интегралын есепте.

Мынадай белгілеу енгіземіз: $t^3 = \frac{x+1}{x-1}$, $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = \frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}$, $x-1 = \frac{2}{t^3-1}$,

нәтижесінде:

$$\int t\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\cdot\frac{(t^3-1)^2}{4}dt = -\frac{3}{2}\int t^3dt = -\frac{3}{8}t^4 + C = -\frac{3}{8}\cdot\frac{x+1}{x-1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

Бұл түрдегі интегралдарға $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, ...)dx$ интегралы да жатады, $x = t^k$ белгілеуінің арқасында интеграл астындағы өрнек рационал функцияға келеді, мұндағы k – барлық x бөлшек көрсеткіштерінің ортақ бөлімі.

Мысал 2. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ тап. Мынадай белгілеу енгізсек: $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$,

$$\int \frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3dt = 4\int\frac{t^2+t}{t^2+1}dt = 4\int(1+\frac{t-1}{t^2+1})dt = 4(\int dt + \int\frac{tdt}{t^2+1} - \int\frac{dt}{t^2+1}) = 4t + 2\ln(t^2+1) - 4arctgt + C.$$

x айнымалысына қайта оралсақ, ізделінді интегралдың жауабына келеміз:

$4\sqrt[4]{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) - 4arctg\sqrt[4]{x} + C.$

2-жағдай. Мына түрдегі интеграл астындағы иррационал функцияны тригонометриялық ауыстыруларды қолданып, рационал функцияның интегралына әкелеміз:

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx, \quad x = a\sin t;$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx, \quad x = atgt;$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx, \quad x = a\sec t.$$

Мысал 3.

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx = \left| x = 2\sin t,\ dx = 2\cos tdt \right| = \int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t}2\cos tdt = \frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{ctg^4 t}{\sin^2 t}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int ctg^4 tdctgt = -\frac{1}{20}ctg^5 t + C = C - \frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}.$$

3-жағдай. Интеграл $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегралын шешу үшін $x-\alpha = \frac{1}{t}$ белгілеуін енгіземіз.

Мысал 4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$ тап.

Мына белгілеулерді енгізсек $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-2x-1} = \frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}$, онда

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}} = -\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{2}} + C = -\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$